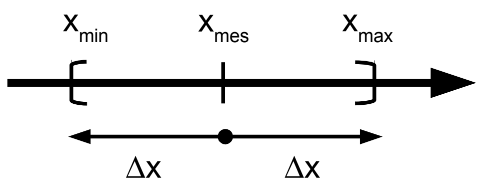
INCERTITUDE et PRECISION

Marge d'incertitude

Le fait que la précision d'une mesure soit limitée se se traduit concrètement par une « marge d'incertitude ». Cela signifie que la valeur recherchée n'est pas représentée par un nombre exact, mais par un intervalle d'une certaine largeur.



Nous indiquerons la valeur recherchée (x) de deux manières :

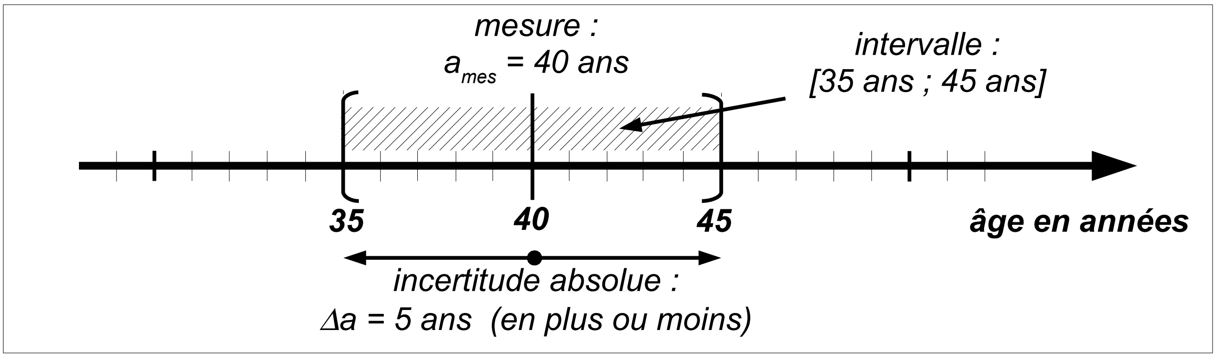
1) par la **valeur mesurée** (x_{mes}) et l'**incertitude absolue** (Δx) : $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$

2) par les **valeurs extrêmes** (x_{min} et x_{max}) de l'**intervalle** : $\boxed{x \in [x_{min} ; x_{max}]}$ ou $\boxed{x_{min} \leqslant x \leqslant x_{max}}$

La **valeur mesurée** est au centre de l'intervalle : $\boxed{x_{mes} = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2}}$

L'**intervalle** est centré sur x_{mes} et sa largeur est $2 \cdot \Delta x$: $\boxed{x \in [x_{mes} - \Delta x ; x_{mes} + \Delta x]}$

Exemple 1 : *un botaniste estime l'âge d'un arbre entre 35 et 45 ans.*



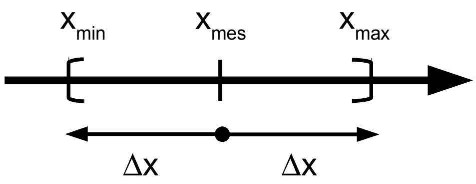
On indique l'âge (a) ainsi : *1) a = 40 ans± 5 ans*
2) a $\in$ [35 ans ; 45 ans]
ou 35 ans ≤ a ≤ 45 ans

Exemple 2 : *un élève recherche la largeur L d'une feuille A4 qu'il mesure à l'aide d'une règle en plastique graduée au millimètre et trouve 21,0* cm.

La valeur mesurée est L_{mes} = 21,0 cm
L'incertitude est $\Delta L = \pm 1\,mm = \pm 0,1\,cm$

On indique la largeur recherchée ainsi : 1) L = 21,0 cm*± 0,1* cm
2) L $\in$ [20,9 cm *; 21,1* cm*]*
3) 20,0 cm ≤ L ≤ 21,1 cm

Incertitudes absolue et relative



La valeur (x) est représentée par l'intervalle [x_{min} ; x_{max}], centré sur la valeur mesurée x_{mes}.

L'**incertitude absolue** (Δx) est la demi-largeur de l'intervalle décrivant la valeur (x) :

$$\boxed{\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}}$$

L'**incertitude relative** (Δx / x)correspond à la même incertitude, mais exprimée par rapport à la valeur mesurée (x_{mes}), le plus souvent en pourcentage :

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x_{mes}} = \frac{\Delta x}{x_{mes}} \cdot 100\ \%}$$

Exemple 1 : *On mesure la masse d'un gros chien :* $m_{chien} = 78{,}5$ kg$\pm 0{,}5$ kg
L'incertitude absolue sur la masse du chien est : $\Delta m_{chien} = 0{,}5$ kg
L'incertitude relative correspondante est :

$$\frac{\Delta m_{chien}}{m_{mes,chien}} = \frac{0{,}5\ \text{kg}}{78{,}5\ \text{kg}} = 6 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-3} \cdot 100\ \% = 0{,}6\ \%$$

Exemple 2 : *On mesure la masse d'un petit chat :* $m_{chat} = 2{,}5$ kg$\pm 0{,}5$ kg
L'incertitude absolue sur la masse du chat est : $\Delta m_{chat} = 0{,}5$ kg
L'incertitude relative correspondante est :

$$\frac{\Delta m_{chat}}{m_{mes,chat}} = \frac{0{,}5\ \text{kg}}{2{,}5\ \text{kg}} = 0{,}2 = 0{,}2 \cdot 100\ \% = 20\ \%$$

Comparaison entre incertitudes absolues et relatives

L'incertitude relative permet d'interpréter l'incertitude en la comparant avec la valeur mesurée. On peut ainsi mieux évaluer l'importance de celle-ci.

Exemple 3 : *en comparant les exemples 1 et 2 ci-dessus, on se rend compte que les incertitudes absolues sont identiques (Δm = 0,5 kg). Cette imprécision sur la masse a une relativement faible influence sur la masse du chien (± 0,6 %), alors qu'elle influence de manière importante celle du chat (* $\pm 20\%$ *).*

Précision et incertitude d'une mesure

A quelques rares exceptions près - dénombrement d'objets par exemple - toute mesure est entachée d'incertitude et son résultat n'est par conséquent pas exact *(voir Fiche 06 « Chiffres Significatifs »).*

L'incertitude absolue d'une mesure unique dépend essentiellement de trois facteurs :

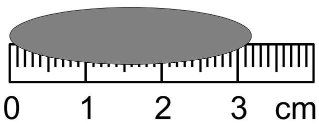
1° la précision de l'instrument de mesure employé
2° les facultés de l'expérimentateur
3° les conditions expérimentales

Instrument de mesure analogique

Un instrument « analogique » indique la valeur à mesurer sur une échelle graduée (au moyen d'un index par exemple). L'expérimentateur « lit » le résultat en choisissant la division de la graduation la plus proche de l'index.

Avec de tels instruments, on adopte la règle selon laquelle **l'incertitude introduite dans la mesure par l'instrument dépend de sa précision et correspond à sa plus petite graduation**.

Exemple 4 :



On mesure la longueur d'une ellipse à l'aide d'une règle graduée à 0,1 cm*. La règle indique environ 3,2* cm*. Pour tenir compte de la précision limitée, on indiquera que l'ellipse mesure entre 3,1 et 3,3* cm*. On peut noter ce résultat sous la forme 3,2 ± 0,1* cm*.*

*Le résultat obtenu a deux **chiffres significatifs**. Si l'on veut donner une seule valeur (sans intervalle), il faut se limiter à écrire « 3,2 cm ».*

***Remarque :** La largeur de l'intervalle d'incertitude correspond donc au double de la petite graduation, soit 0,2 cm. On prend ainsi en compte le fait que le positionnement du zéro de la règle à gauche de l'ellipse est également sujet à imprécision.*

Instrument de mesure numérique

Comme son nom l'indique, un instrument « numérique » affiche une valeur numérique sur un écran. L'expérimentateur n'a plus alors qu'à relever le nombre affiché. La lecture est donc généralement plus aisée, ce qui ne veut pas dire que l'instrument soit plus précis.

Avec de tels instruments, on adopte la règle selon laquelle **l'incertitude introduite dans la mesure par l'instrument dépend de sa précision et correspond au plus petit intervalle affichable**. Le nombre affiché est un arrondi de la valeur réelle. Dans le cas où ce nombre n'est pas stable, c'est la dernière décimale affichée de manière stable qui définit l'incertitude.

Exemple 5 : *On mesure la masse d'un objet sur une balance qui possède un affichage* ***au*** *gramme (153, 154, 155* g*...). Si l'affichage indique 154* g*, il faut comprendre que la valeur réelle est supérieure à 153* g *et inférieure à 155* g*. On note alors que la masse est de 154 ± 1* g*.*

0154 g

Le résultat (entre 153 et 155 g*) a ici trois* ***chiffres significatifs*** *et s'écrit* $1,54\cdot10^2\,g\pm1\mathrm{g}$

Remarques :

- Si l'expérimentateur n'introduit - du fait de ses facultés limitées - aucune incertitude supplémentaire, et que les conditions expérimentales sont idéales, l'incertitude introduite par l'instrument correspond à l'incertitude absolue de la mesure.
- Quelque soit l'instrument, <u>il est judicieux de regarder les indications relatives à la précision placées par le fabricant sur l'appareil</u> (ou dans son manuel). Celles-ci sont généralement fiables (surtout si le fabricant est sérieux et l'appareil bien entretenu), ce qui n'exclut pas d'être vigilant et critique face aux résultats obtenus.
- <u>Il faut veiller avant chaque mesure au bon réglage du « zéro »de l'instrument</u> utilisé (étalonnage de l'instrument).

Facultés de l'expérimentateur et conditions expérimentales

Les facultés de l'expérimentateur (acuité visuelle limitée, maladresse, déconcentration, inexpérience) et les conditions expérimentales (température élevée, vibrations, position inconfortable de l'expérimentateur...) peuvent elles aussi introduire de l'incertitude et dégrader la qualité de la mesure. L'incertitude absolue de la mesure n'est alors plus limitée par l'imprécision de l'instrument seulement, mais également par des facteurs extérieurs.

Pour estimer au mieux l'incertitude absolue, on répète l'expérience afin d'observer comment les résultats varient, et on détermine les valeurs minimale et maximale admissibles pour la mesure. Lorsqu'on dispose d'un grand nombre de mesures, on se permet généralement d'écarter les résultats suspects ou trop éloignés de la moyenne, considérés comme non significatifs, d'où le terme « admissible » ci-dessus.
Les valeurs minimale et maximale mesurées retenues sont considérées comme les limites de l'intervalle d'incertitude de la mesure, et l'incertitude absolue est la moitié de leur différence. De cette manière l'intervalle d'incertitude englobe tous les résultats retenus, et le résultat de la mesure est la valeur centrale de cet intervalle.

Remarque : *on préfère souvent adopter la moyenne des mesures de préférence à la valeur centrale. L'incertitude absolue est alors l'écart entre cette moyenne et le résultat de mesure retenu qui en est le plus éloigné.*

Exemple 6 : *Lors d'un chronométrage manuel, on obtient plusieurs résultats (*2,31 s; 2,58 s; 2,41 s; 2,68 s; 2,99 s et 3,07 s) *compris entre 2,3* s *et 3,1* s *(le troisième chiffre n'est manifestement pas significatif). La valeur centrale est 2,7* s *et l'écart entre les extrêmes est de 3,1* s *– 2,3* s *= 0,8* s*. On écrit donc 2,7 s ± 0,4* s*, et ce même si le chronomètre employé affiche le 1/100*^{e} s*.*

Exemple 7 : *Une balance de précision d'excellente qualité est posée sur un socle peu stable, qui vibre. On observe que l'affichage oscille entre 12,208 et 12,276* g. *Le résultat est :12,242 ± 0,034* g. *Si l'on veut donner une seule valeur avec un nombre pertinent de chiffres significatifs, il faut arrondir à 12,2* g, *et ne conserver que trois chiffres. Les deux derniers chiffres de l'affichage sont manifestement inexploitables.*

<u>Méthodes pour minimiser les incertitudes</u>

- Effectuer une série de mesures plutôt qu'une mesure unique. Les résultats suspects sont écartés, ou les mesures refaites. Calculer la moyenne des résultats retenus, qui constitue le résultat de la mesure. L'incertitude absolue est l'écart entre cette moyenne et le résultat de mesure qui en est le plus éloigné. Plus le nombre de mesures est élevé, plus le résultat est fiable et précis.
- **Faire vérifier ses résultats par un deuxième opérateur**.
- **Lorsque c'est possible, mesurer un multiple de la valeur recherchée, et diviser le résultat de la mesure <u>et son incertitude absolue</u> par le facteur multiplicatif choisi.**

Exemple 8 *:*

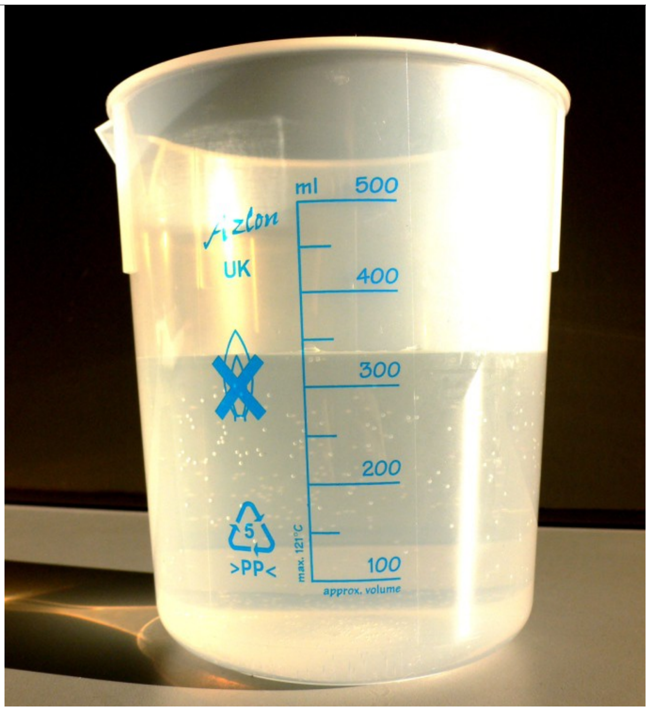
Plusieurs personnes ont mesuré la période d'oscillation T d'un pendule et obtenu les résultats suivants :
1,05 s ; 0,98 s ; 0,89 s ; 1,07 s ; 1,00 s ; 1,27 s ; 1,02 s ; 0,93 s ; 0,43 s ; 0,99 s ; 1,07 s ; 0,91 s
Quelles sont la valeur de T, l'incertitude absolue et l'incertitude relative du résultat ?
Résultats écartés : 1,27 s et 0,43 s.
Moyenne des résultats retenus : 0,99 s (2 c.s.)
Résultat retenu le plus éloigné de la moyenne : 0,89 s
Incertitude absolue : ΔT = 0,99 s – 0,89 s = 0,10 s
Incertitude relative : 0,10 : 0,89 = 11%

Exemple 9 *: pour déterminer l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une règle millimétrée, on peut mesurer avec une incertitude de 1 mm l'épaisseur d'un paquet de cent feuilles et diviser le résultat et l'incertitude par cent. La valeur de l'épaisseur d'une feuille ainsi obtenue est précise au centième de mm.*

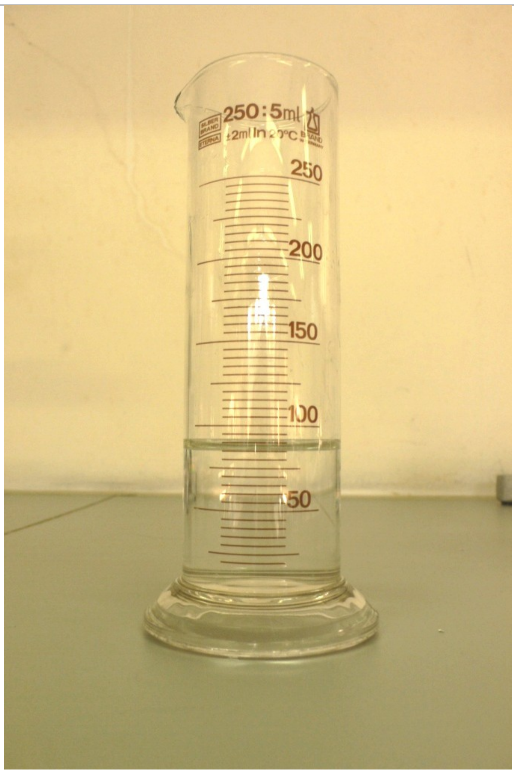
Exercice 1

Écrire le résultat de chacune des mesures ci-dessous sous la forme $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$.

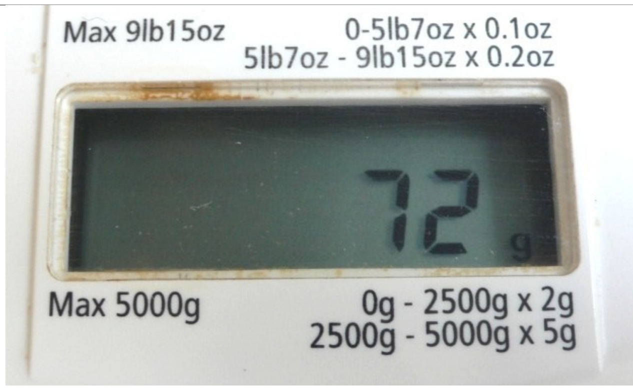
a) Température de l'eau dans le verre



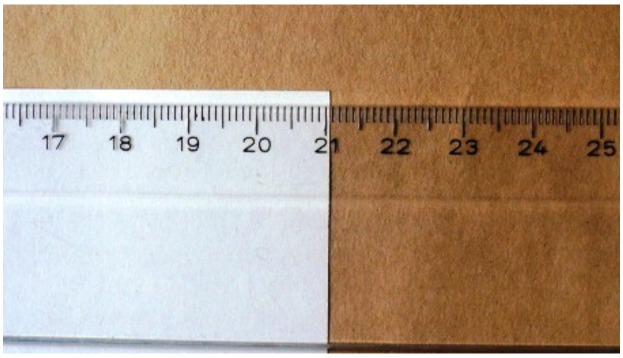
b) Volume d'eau dans le bécher



c) Volume d'eau dans le cylindre gradué



d) Masse d'un tube de colle



e) Largeur d'une feuille A4

Exercice 2

Un laborant a pesé une seule fois un échantillon de parfum à l'aide d'une balance électronique dont l'affichage digital a indiqué la valeur de 13,45 g
Indiquer le résultat de cette mesure sous la forme $\boxed{x \in [x_{min} ; x_{max}]}$ puis calculer son incertitude relative.

Exercice 3

A l'aide d'une montre bracelet qui indique les secondes, une personne a mesuré le temps qui s'est écoulé entre la vision d'un éclair et le coup de tonnerre qui l'a suivi et l'a estimé compris entre 3 et 4 secondes.
Écrire le résultat de cette mesure sous la forme $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$ puis calculer son incertitude relative.

Exercice 4

Parmi les mesures suivantes, laquelle est-elle la plus précise (c'est-à dire quelle est celle dont le résultat présente la plus petite incertitude relative) ?

a) $m_1 = 25 \pm 0{,}5$ kg b) $m_2 = 4{,}05 \pm 0{,}05$ g c) $m_3 = 1500 \pm 1$ t

Exercice 5

Pour chacune des mesures ci-dessous, écrire le résultat sous la forme $\boxed{x \in [x_{min} ; x_{max}]}$, et calculer l'incertitude relative de la mesure.

a) A l'aide d'une balance de cuisine graduée de 5 grammes en 5 grammes, mesure de la masse d'une pomme : 20 g.

b) A l'aide d'une balance électronique affichant la masse au demi-gramme, mesure de la masse de la même pomme : 23,5 g.

c) A l'aide d'une balance électronique précise au centième de gramme, mesure de la masse de la même pomme : 23,56 g.

Exercice 6

Plusieurs opérateurs ont à tour de rôle déterminé le volume du même caillou par immersion dans de l'eau, à l'aide d'un cylindre gradué en ml (1 graduation tous les 2 ml). Voici le tableau récapitulatif de leurs résultats :

Opérateur n°	1	2	3	4	5	6	7	8
V eau seule / ml	30	50	30	24	40	70	24	60
V eau et caillou / ml	35	62	54	40	52	84	38	78

a) Déterminer le volume V de ce caillou. Écrire le résultat sous la forme $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$

b) Calculer l'incertitude relative du résultat.

Exercice 7

Une élève a mesuré avec une règle d'écolier l'épaisseur d'une feuille de carton et obtenu 3 mm. Elle a mesuré ensuite l'épaisseur d'une pile de 20 feuilles et trouvé 54 mm.

a) Ecrire pour chaque cas l'épaisseur e d'une feuille sous la forme $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$

b) Calculer l'incertitude relative du résultat dans chaque cas et comparer.

Exercice 8

Pour connaître la période d'oscillation d'un ressort, un groupe d'élèves a chronométré plusieurs fois la durée de 50 oscillations et obtenu les résultats suivants (affichage au 1/100 s) :

24,33 s ; 24,52 s ; 24,18 s ; 24,75 s ; 24,38 s ; 27,12 s ; 24,42 s ; 24,40 s

a) Déterminer la période T de ce ressort et écrire le résultat sous la forme $\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$
$\boxed{x = x_{mes} \pm \Delta x}$

b) Calculer l'incertitude relative du résultat.

Solutions

ex1 : a) $T = 40{,}9\,°C \pm 0{,}1\,°C$ b) $V = 350\,mL \pm 50\,mL$

c) $T = 90\,mL \pm 5\,mL$ d) $m = 72\,g \pm 2\,g$

e) $L = 21{,}0\,cm \pm 0{,}1\,cm$

ex2 : $m \in [13{,}44\,g\ ;\ 13{,}46\,g]$ et 0,07%

ex3 : $t = 3{,}5\,s \pm 0{,}5\,s$ et 18%

ex4 : C'est la dernière mesure (pour m_1 : 2% ; pour m_2 : 1,2% ; pour m_3 : 0,067%)

ex5 : a) $m \in [15\,g\ ;\ 25\,g]$ et 25%

b) $m \in [23{,}0\,g\ ;\ 24{,}0\,g]$ et 2,1%

c) $m \in [23{,}55\,g\ ;\ 23{,}57\,g]$ et 0,04%

ex6 : a) Sans les mesures suspectes des opérateurs 1 et 3 : $V = 14\,mL \pm 4\,mL$

b) 29 %

ex7 : a) $e = 3\,mm \pm 1\,mm$ (premier cas) et $e = 2{,}7\,mm \pm 0{,}05\,mm$ (second cas)

b) 33 % et 1,9 %

ex8 : a) En éliminant la mesure suspecte 27,12 s : $T = 0{,}4884\,s \pm 0{,}0066\,s$

b) 1,4 %